/ /

المحاضرة السابعة:

نموذج النمو السكاني or النموذج النمو الأسي or النموذج مالتوس المستمر or النموذج النمو اللامحدود.

مثال: لتكن $N(t)$ المقياس (الحجم السكاني) أو العدد السكاني في الزمن t، ولتكن b و d تمثلان معدلات الولادة والوفاة في وحدة الزمن. حيث أن b: عدد الولادات خلال سنة على عدد السكان.

d: عدد الوفيات على عدد السكان.

مما سبق يمكننا أن نتوقع أن يحدث الولادات خلال سنة هو bN وبالمقابل عدد الوفيات dN في سنة.

وبالتالي فإن معدل تغير السكان ككل يعطى ب $\frac{dN}{dt}$ ويمكن أن نكتب

$$\frac{dN}{dt} = b_N - d_N = (bN - dN) = (b-d)N = \lambda N$$

حيث نرمز لـ λ بـ $(b-d)$ وبالتالي $b>d$

حيث: $b, d > 0$

وهي $\frac{dN}{dt} = \lambda N$ وبالتالي هي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى تدعى النموذج الرياضي للسكان. ويمكننا بسهولة إيجاد الحل حيث أن:

$$N(t) = N(0)e^{\lambda t}$$

وهو الحل التحليلي للنموذج المتزايد. $N(0)$ ثابت ويمكن اعتباره الحل الابتدائي.

بعد إيجاد هذا الحل يمكننا حساب الزمن والعدد السكاني.

ملاحظة: ويدعى بنموذج مالتوس للنمو السكاني أو نموذج اللامحدود

ملاحظة:

عندما $t \to \infty \Leftarrow N(t) \to \infty$

وهذا يفيدنا بالتنبؤ بالتزايد على المدى الطويل ولكن لا يمكننا القول أن هذا النموذج لا يبعد عن الواقع لأنه يعطي معلومات غامضة عن عدد السكان.

مثال: استنبات بكتيري أو زراعة بكتيرية مكونة من 1000 خلية بكتيرية

/ /

وبعد ساعتين أصبح 2500 خلية بكتيرية.
أوجد عدد البكتيريا بعد 6 ساعات

الحل: (من الممكن أن تتكرر هذا السؤال).

ملاحظة: بافتراض أن الاستنبات ينمو بمعدل تناسبي مع حجمه (أي قياسه)
إن النموذج الموافق هو نموذج مالتوس وهو

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

نكامله: وذلك بفصل المتغيرات

$$\frac{dN}{N} = \lambda\, dt$$ ← نكامل

$$\ln N = \lambda t + c \Rightarrow N = c\, e^{\lambda t}$$

نوجد c أي نقول $N(0) = c\, e^{\lambda(0)} \Rightarrow N(0) = c$

ثم نعوضها في النموذج $N = c\, e^{\lambda t}$

$N = N(0)\, e^{\lambda t}$ ← الشكل التحليلي

الآن نعود لمعطيات المسألة:

$N(2) = 2500$

$N(0) = 1000$

نعوض في الشكل التحليلي:

$* \; N(6) = 1000\, e^{\lambda(6)}$ ← هذا المطلوب؟

نوجد λ

$$N(2) = 2500 = 1000\, e^{2\lambda}$$

$$e^{2\lambda} = \frac{2500}{1000} = 2.5$$

$$\ln(e^{2\lambda}) = \ln(2.5)$$

$$2\lambda = \ln(2.5) \Rightarrow \lambda = \frac{\ln(2.5)}{2} = 0.45$$

Alamal

/ /

نعوض في * حيث: أي بعد أجل $t = 6$

$$N(6) = 1000\, e^{(0.45)(6)} = 14879.73$$

نموذج تناقص درجة الحرارة:

قانون نيوتن في التبريد يعطي أن درجة الحرارة لجسم ما T تتغير بمعدل متناسب للفرق في درجة حرارة الجسم ودرجة حرارة الوسط المحيط T_s وفقاً لقانون نيوتن في التبريد يكون لدينا:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s) \quad ; \quad k < 0$$

$$\frac{dT}{(T - T_s)} = k\,dt \rightarrow (\text{بالمكاملة})$$

$$\ln\left(\frac{T - T_s}{c}\right) = kt$$

وبالتالي يكون النموذج:

$$T - T_s = (T(0) - T_s)\, e^{kt}$$

وهو الحل الفعلي.

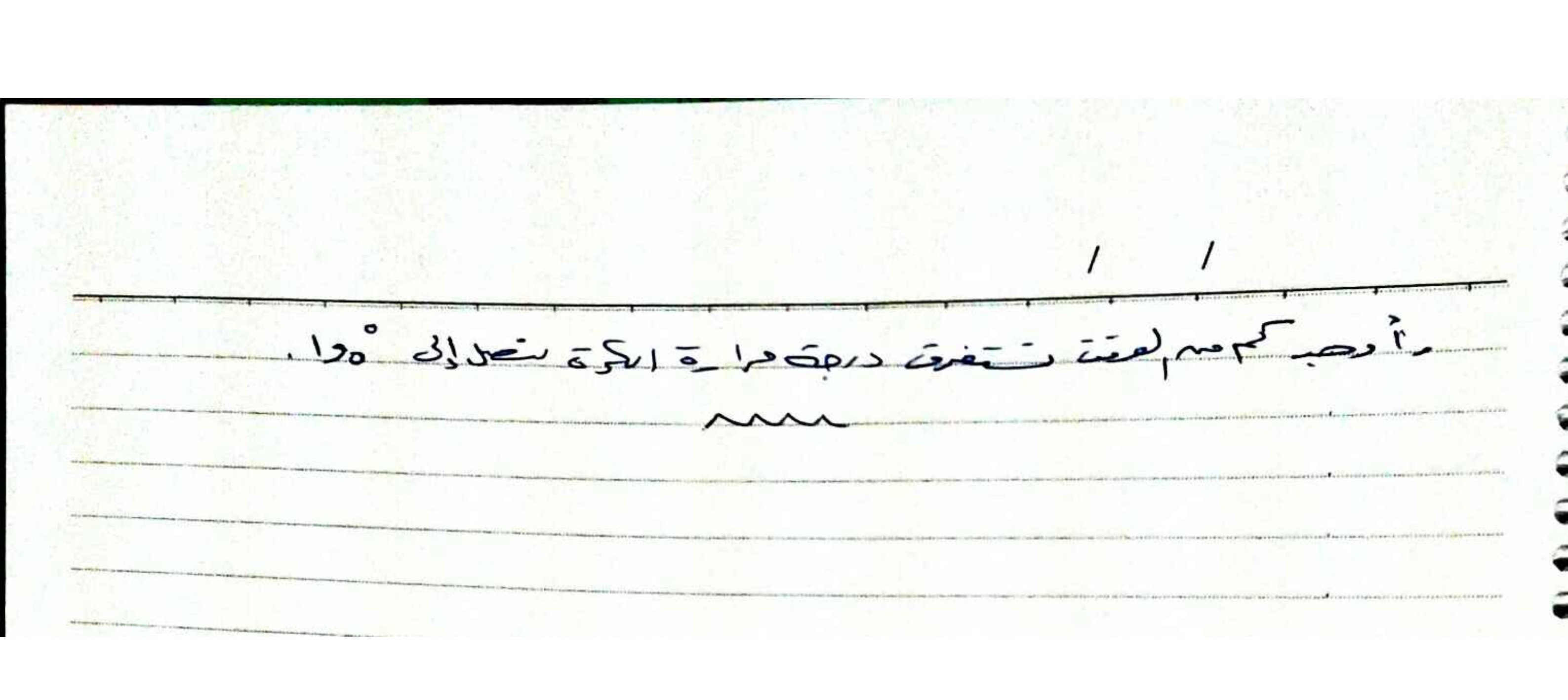
مثال (وظيفة):

تم قراءة درجة حرارة ميزان $100°F$ ووضع هذا الميزان في وعاء من الزيت لحفظ درجة حرارة $10°F$، والسؤال:
ما هي درجة حرارة التعرية (الميزان) عند الزمن $t = 10\ sec$
إذا علمت أن درجة حرارته هي $60°F$ عند الزمن $t = 4\ sec$
حسب النموذج السابق.

دورة تمرين (وظيفة):

كرة فولاذية درجة حرارتها $20°$ وضعت داخل فرن درجة حرارته $200°$ بعد دقيقتين أصبحت درجة الحرارة $50°$، والمطلوب أوجد درجة حرارة الكرة بعد وضعها بالفرن بخمس دقائق

ملاحظة: التزايد إشارة موجبة ($k > 0$) وإذا تناقص $k < 0$ سالبة)


٢) أوجد كم من الوقت تستغرق درجة حرارة الكرة لتصل إلى ١٩٥°.